Université Paul Sabatier 2017/2018

L2 Maths "Compléments de théorie des ensembles"

TD n^{o}3: Applications

Exercice 1 La composition des applications est-elle commutative ?

Exercice 2 Soient des ensembles $A \subset E$ et l'application $f : E \to F$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et donner un contrexemple de $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Exercice 3 Montrer que pour tout ensemble E, on a $E \neq \mathcal{P}(E)$.

Exercice 4 Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications entre ensembles. Montrer que $g \circ f$ injectif n'implique pas g injectif. De même, montrer que $g \circ f$ surjectif n'implique pas f surjectif.

Exercice 5 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Peut-on en déduire que f et g sont bijectives ? Si oui, démontrez-le. Si non, donner un contrexemple.

Exercice 6 (i) On suppose E non vide. Montrer que $f : E \to F$ est injective si, et seulement si, elle admet une *rétraction* de f, c.à-d. une application $r : F \to E$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.
(ii) Énoncer et prouver une propriété analogue portant sur la surjectivité de $f : E \to F$ et l'existence d'une *section* de f, c.à-d. une application $s : F \to E$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 7 Soient A, B deux ensembles. À quelle condition (nécessaire et suffisante) a-t'on $\mathcal{F}(A,B) = \emptyset$?

Exercice 8 Soit G le graphe d'une application $f : E \to F$. Reconnaître les ensembles $pr_2(G \cap (\{a\} \times F))$ et $pr_1(G \cap (E \times \{b\}))$, où l'on a pris $a \in E$ et $b \in F$ (Rappel: $pr_1 : E \times F \to E$ est la projection sur la première coordonnée et $pr_2 : E \times F \to F$ sur la deuxième).

Exercice 9 Soient $f : E \to F$ et $B \subset F$.
(i) Montrer que $B = f\big(f^{-1}(B)\big)$ si, et seulement si, $B \subset \mathrm{Im} f$. Une des deux inclusions est toujours vraie. Laquelle?
(ii) De manière générale, montrer que $B \cap \mathrm{Im} f = f\big(f^{-1}(B)\big)$.

Exercice 10 On dit que $A \subset E$ est *saturé* par $f : E \to F$ si $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
(i) Montrer que cette condition équivaut à: $\forall x \in A\ ,\ \forall x' \in E\ :\ f(x) = f(x') \Rightarrow x' \in A$.
(ii) Montrer que les parties saturées de E sont les parties de la forme $f^{-1}(B)$, $B \subset F$.

Exercice 11 Soient $f : E \to F$, $f' : E' \to F$, et $f'' : E \to F'$. Démontrer les équivalences suivantes:

$$\big(\exists u : E \to E'\ :\ f = f' \circ u\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f')\big).$$

$$\big(\exists v : F \to F'\ :\ f'' = v \circ f\big) \Longleftrightarrow \big(\forall x_1, x_2 \in E\ :\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f''(x_1) = f''(x_2)\big).$$

Deuxième série (exercices facultatifs)

Exercice 12 Pour cet exercice, il faut connaître la représentation binaire des entiers naturels. On note $\mathcal{P}_f(\mathbf{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$. Pour tout $A \in \mathcal{P}_f(\mathbf{N})$, on pose:

$$f(A) := \sum_{n \in A} 2^n.$$

Quelle propriété possède l'application $f : \mathcal{P}_f(\mathbf{N}) \to \mathbf{N}$?

Exercice 13 (i) Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbf{N}$ et en déduire une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \times \{0, \ldots, b-1\}$ (où $b \geq 1$).
(ii) Donner une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}$.
(iii) Donner une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. (Méthode: dessiner $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ puis numéroter ses éléments.)
(iv) Donner une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Exercice 14 On dit qu'un ensemble E est *anormal* s'il existe une bijection de E sur une partie stricte de E; et qu'il est *normal* dans le cas contraire[1].
(i) Montrer que $\mathbf{N}$ est anormal.
(ii) Montrer que, si E est anormal, tout ensemble F contenant E l'est aussi.
(iii) Montrer que $\emptyset$ est normal.
(iv) Montrer que, si E est normal et si $x \notin E$, alors $E \cup \{x\}$ est normal.
(v) Montrer que, si E est anormal, il existe une injection de $\mathbf{N}$ dans E. (Méthode: soit f une bijection de E sur une partie stricte de E; posant $E_0 := E$ puis $E_{k+1} := f(E_k)$, montrer que les inclusions $E_{k+1} \subset E_k$ sont strictes, puis définir $\mathbf{N} \to E$ en associant à tout $k \in \mathbf{N}$ un élément arbitraire de $E_k \setminus E_{k+1}$.)

Exercice 15 1) La règle $a^{b+c} = a^b a^c$ traduit l'existence d'une bijection de $\mathcal{F}(B \cup C, A)$ sur $\mathcal{F}(B,A) \times \mathcal{F}(C,A)$. Expliciter cette bijection.
2) La règle $(ab)^c = a^c b^c$ traduit l'existence d'une bijection de $\mathcal{F}(C, A \times B)$ sur $\mathcal{F}(C,A) \times \mathcal{F}(C,B)$. Expliciter cette bijection.
3) Trouver de même une bijection correspondant à la règle $(a^b)^c = a^{bc}$.

---

[1] Cette terminologie sera modifiée au chapitre 4.

Exercice 16 Dans cet exercice et dans les trois suivants, $B := \{0,1\}$ désigne l'ensemble des bits. Soient E un ensemble et $X, Y \subset E$ des sous-ensembles, de fonctions caractéristiques $\chi_X, \chi_Y : E \to B$.
1) Soit $Z := X \cap Y$. Montrer que χ_Z est donnée par la formule:

$$\forall x \in E \ , \ \chi_Z(x) = \chi_X(x)\chi_Y(x).$$

2) Décrire de même les fonctions caractéristiques associées à $X \cup Y$, $X \setminus Y$ et $X \oplus Y$. Il faudra chaque fois introduite une loi de composition interne sur B.

Exercice 17 Soient E un ensemble fini et $A \subset E$. À quoi est égale la somme $\sum_{x \in E} \chi_A(x)$? Il faudra préciser la loi de composition interne sur B implicite dans le symbole Σ.

Exercice 18 Soient E un ensemble fini et $A_1, \ldots, A_p \subset E$ des sous-ensembles de E. Vérifier que la fonction caractéristique de la réunion $A := A_1 \cup \cdots \cup A_p$ est:

$$\begin{aligned} \chi_A &= 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdots (1 - \chi_{A_p}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \chi_{A_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq p} \chi_{A_i \cap A_j} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \chi_{A_i \cap A_j \cap A_k} + \cdots + (-1)^{p-1} \chi_{A_1 \cap \cdots \cap A_p}. \end{aligned}$$

En combinant cette formule avec celle de l'exercice précédent, déduire la formule du crible (ou formule de Poincaré) donnant le nombre d'éléments de B.

Exercice 19 Soit $A := \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini dont les éléments ont été numérotés de 1 à n. Toute application $\chi : A \to B$ peut être codée par un *vecteur de bits* ("bit vector") $V_\chi := (\chi(a_1), \ldots, \chi(a_n)) \in B^n$. En déduire que tout sous-ensemble $X \subset A$ peut être codé par un vecteur de bits et décrire les opérations dans B^n qui correspondent aux opérations sur les sous-ensembles de A.
